

一类 Cayley 图:环的递归立方体网络

程冬琴

(广东工业大学 应用数学学院,广东 广州 510006)

摘要: 证明环的递归立方体网络(Recursive Cube of Rings network)(简称 RCR 网络)也是 Cayley 图,它有很多良好的拓朴性质.采用有限群导出 Cayley 图的方法,先定义了一个新的群,然后重新证明了 RCR 网络是一类 Cayley 图,并更改了 RCR 中节点的表示方法.

关键词: 环的递归立方体网络(Recursive cube of rings network); Cayley 图; 互连网络; 群

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2011)02-0081-04

1 基本概念

用图来表示互连网络拓扑结构这一事实已被计算机工作者和工程技术人员广泛接受和运用^[1],图论是设计和分析互连网络拓扑结构的一个非常有用的数学工具.一个图 G 是一个有序的二元组 $(V(G), E(G))$,其中 $V(G)$ 是 G 的顶点集, $V(G)$ 中的元素称为 G 的顶点; $E(G) = V(G) \times V(G)$ 是 G 的边集, $E(G)$ 中的元素称为 G 的边.边中的一对顶点称为该边的端点.一条边的两端点如果是相同的,这样的边称为环.如果 $V(G) \times V(G)$ 是有序顶点对集,则称图 G 为有向图;如果 $V(G) \times V(G)$ 是无序顶点对集,则称图 G 是无向图.本文所说的图是指无向、无环的图.

互连网络可以用图来表示,图的顶点表示系统中的元件,图的边表示元件之间的物理连线,其中有向边表示单向通信连线,无向边表示双向通信连线,关联函数指定了元件之间的连接方式.这样的图称为互连网络拓扑结构,或简称为拓扑结构. Sun 等^[2]介绍了一种新的可扩展的互连网络,叫做环的递归立方体网络(Recursive Cube of Rings Network,RCR 网络).一般地,一个 RCR 网络是由一些链互相连接的许多环构成,这些链叫做立方体链(cube links).环中的节点由另外一些链连接,那些链叫做环链(ring links).一个 RCR 网络记成 $RCR(k, r, j)$,其中 k 是立方体的维数, r 是环上节点的数目, j 是生成种子(generation seed)的扩张数.图 1 画出了一个 $RCR(2, 2, 2)$ 网络.

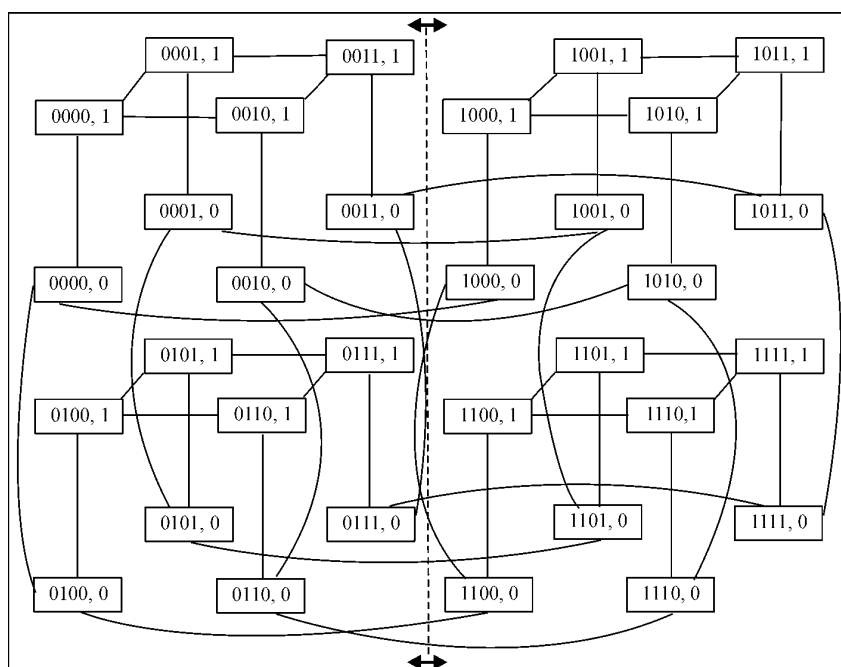


图 1 $RCR(2,2,2)$

收稿日期: 2011-01-14

作者简介: 程冬琴(1984-),女,硕士研究生,主要研究方向为代数图论.

Cayley 图是由英国数学家 Cayley 于 1895 年最早构造出来的高对称正则图. Cayley 图由有限群导出,构造方便,深受网络设计者的欢迎和重视.徐俊明等^[1]证明了 Cayley 图的笛卡尔乘积还是 Cayley 图.文献^[2]提出 RCR 网络是很好的互连网络拓扑,它拥有很多良好的拓扑性质,比如固定的度数、小的维数、广泛的对剖宽度、对称性、容错性等.然而,文献^[2]中证明 RCR 网络是 Cayley 图时,其证明不是很详细完整,并且其节点的标记也出现了一些错误.用有限群导出 Cayley 图的方法,文献^[3]证明了立方连通圈(cube connected cycle)是 Cayley 图.本文也用有限群导出 Cayley 图的方法,首先构造一个新的群,然后在定义的群上证明 RCR 网络是 Cayley 图.对于 RCR 网络中节点的标号,也做了相应的更改.

2 RCR 网络和 Cayley 图

在这一节中,将给出 RCR 网络的定义和 Cayley 图的定义.

RCR 网络中的节点地址记成 $[a_1 a_2 \cdots a_i \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b]$, 其中 a_i 是一个二进制位, $1 \leq i \leq k+j$, $0 \leq b < r$. 在这个网络中,每个节点都有 k 个立方体邻点(cube neighbors)和两个环邻点(ring neighbors). 地址为 $[a_1 a_2 \cdots a_i \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b]$ 的节点的 k 个立方体邻点的地址为 $[a_1 a_2 \cdots \bar{a}_{ij+x} \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b]$ (其中 $1 \leq x \leq k$), 它的两个环邻点的地址为 $[a_1 a_2 \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b+1 \pmod{r}]$ 和 $[a_1 a_2 \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b-1 \pmod{r}]$.

Hu 等^[4]证明了 $\text{RCR}(k, 1, j)$ 网络是一个不连通的图. Choi 等^[5]扩展了这个结论,并证明了当 $k(r-1) \geq j$ 时, $\text{RCR}(k, r, j)$ 是一个连通图. Choi 等^[5]还证明了对于一个连通图 $\text{RCR}(k, r, j)$, 它的维数 D 是 $k+j + \lceil j/k \rceil + \lfloor r/2 \rfloor$.

下面给出一些定义,首先介绍群的定义.

定义 1^[6] 设 G 为非空集合, “ $\circ$ ”为 G 上的一个代数运算,如果 G 的运算满足:

- (1) “ $\circ$ ”满足结合律,即 $\forall a, b, c \in G$, 都有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- (2) G 中有元素 e , 使对每个元 $a \in G$, 有 $e \circ a = a \circ e = a$;
- (3) 对 G 中每个元素 a , 存在元素 $b \in G$, 使 $a \circ b = b \circ a = e$.

当群 G 的代数运算满足交换律时,称 G 是一个交换群,或称 Abel 群,或称加群. 将交换群 G 称为加

群时,通常将代数运算写作“+”,记群为 $(G, +)$ ^[6].

群的直积是研究群的重要手段之一. 利用群的直积可以从已知的群构造出新的群,也可以用小群构造大群. 下面介绍群的直积的概念.

定义 2^[6] 设 G_1, G_2 是群, $G = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in G_1, a_2 \in G_2\}$ 为集合 G_1 与 G_2 的笛卡尔乘积(Cartesian product), 在 G 中定义乘法运算 $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2); (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G$. 则 G 关于上述定义构成群,称为群 G_1 与群 G_2 的外直积(external direct product), 记作 $G = G_1 \times G_2$, G_1, G_2 称为 G 的直积因子.

如果 G_1, G_2 都是加群(运算写作“+”)时,则用 $G_1 \oplus G_2$ 来表示 G_1, G_2 的直积,此时也称为直和^[6], 其运算为

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

下面给出 Cayley 图的定义.

定义 3^[6] 设 $\Gamma = (X, \circ)$ 是非平凡有限群, S 是 X 的非空子集,且不含 Γ 的单位元 e . 定义有向图如下:

$V(\Gamma) = \Gamma; (x, y) \in E(\Gamma) \Leftrightarrow x^{-1}y \in S, \forall x, y \in \Gamma$, 称 G 为群 Γ 关于 S 的 Cayley 图(Cayley graph).

由于 $x^{-1}y \in S \Leftrightarrow y \in xS$, 故 G 为群 Γ 关于 S 的 Cayley 图,即

$$V(\Gamma) = \Gamma, (x, y) \in E(\Gamma) \Leftrightarrow y \in xS, \forall x, y \in \Gamma.$$

类似地,如果 G 为群 Γ 关于 S 的 Cayley 图,则

$$V(\Gamma) = \Gamma, (x, y) \in E(\Gamma) \Leftrightarrow y \in Sx, \forall x, y \in \Gamma.$$

下面给出一个新的定义:

定义 4 代数运算 $\Gamma = ((Z_2)^n \times Z_r, +)$ 是一个可交换群. 即对于 $(Z_2)^n \times Z_r$ 中的任意两个元素 (X_1, b_1) 和 (X_2, b_2) , 其中 $X_1, X_2 \in (Z_2)^n, b_1, b_2 \in Z_r$, 那么 $(X_1, b_1) + (X_2, b_2) = (X_2, b_2) + (X_1, b_1) = (X_1 + X_2, b_1 + b_2)$.

注意到,定义 4 是群 $\Gamma = ((Z_2)^n \times Z_r, +)$ 对于一般的加法运算是一个交换群. 在下一节中,将在同一个集合 $(Z_2)^n \times Z_r$ 上定义一个新的运算,发现新的群不是交换群,但是通过这个新的群,可以得到主要结论,即 RCR 网络是一个 Cayley 图.

3 证明 RCR 网络是一个 Cayley 图

在这一节中,将给出本文的主要结论.

定理 1 $\text{RCR}(k, r, j)$ 网络是 Cayley 图.

证明 令 $(Z_2)^n$ 表示 n 个集合 Z_2 的笛卡尔乘积 $Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$.

$$\text{设 } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是一个 n 阶循环矩阵, 其中 $n = k + j$.

把 $(Z_2)^n$ 中的元素看成是一个行向量 v , 令 vC 中向量加法按模 2 计算, 那么 vC 也是 $(Z_2)^n$ 中的元素. 定义一个新的代数运算 $\Gamma = ((Z_2)^n \times Z_r, *)$, 对任意的 $[x, y], [a, b] \in (Z_2)^n \times Z_r$, 运算 “*” 定义为

$$[x, y] * [a, b] = [x \times C^{bj} + A, y + b].$$

其中, 第一个向量加法是模 2 的 (在 $(Z_2)^n$ 中), 第 2 个向量加法是模 r 的 (在 Z_r 中). 令 Z_r 表示 r 的整数集合 $\{0, 1, \dots, r-1\}$. 那么 $(Z_2)^n$ 和 Z_r 是 Cayley 图. 从矩阵 C 可以得到:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$C^{bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^{k+j} = E(k+j \text{ 阶单位矩阵}).$$

下面首先证明代数结构 $\Gamma = ((Z_2)^n \times Z_r, *)$ 是一个群.

对于 $(Z_2)^n \times Z_r$ 中的任意 3 个元素 $[u, v], [x, y]$ 和 $[a, b]$, 有

(1) 运算 “*” 满足结合律

因为

$$\begin{aligned} \{ [u, v] * [x, y] \} * [a, b] &= \\ [u \times C^{vj} + X, v + y] * [a, b] &= \\ [(u \times C^{vj} + X) \times C^{bj} + A, v + y + b] &= \\ [u \times C^{(y+b)j} + X \times C^{bj} + A, v + y + b]. \end{aligned}$$

另一方面, 又有

$$[u, v] * \{ [x, y] * [a, b] \} = [u, v] * [x \times C^{bj} +$$

$$A, y + b] = [u \times C^{(y+b)j} + X \times C^{bj} + A, v + y + b].$$

$$\text{故 } [u, v] * [x, y] * [a, b] = [u, v] * \{ [x, y] * [a, b] \}.$$

(2) $[a, b]$ 有单位元

$$\text{由 } [x, y] * [a, b] = [x \times C^{bj} + A, y + b] = [a, b] \text{ 得: } X = \mathbf{0} (k+j \text{ 阶单位矩阵}), y = 0. \text{ 即 } [\mathbf{0}, 0] * [a, b] = [a, b].$$

另一方面, 又有 $[a, b] * [\mathbf{0}, 0] = [a \times C^{0j} + \mathbf{0}, b + 0] = [a, b]$, 所以 $[\mathbf{0}, 0] * [a, b] = [a, b] * [\mathbf{0}, 0] = [a, b]$, 即 $[a, b]$ 的单位元是 $[\mathbf{0}, 0]$, 其中第一个 $\mathbf{0}$ 是 $k+j$ 阶单位矩阵.

(3) $[a, b]$ 有逆元

$$\text{由 } [x, y] * [a, b] = [x \times C^{bj} + A, y + b] = [\mathbf{0}, 0], \text{ 得 } X = -A \times C^{-bj} \text{ 和 } y = -b, \text{ 即 } [-A \times C^{-bj}, -b] * [a, b] = [\mathbf{0}, 0]. \text{ 另一方面, 又有}$$

$$[a, b] * [-A \times C^{-bj}, -b] = [a \times C^{-bj} - A \times C^{-bj}, b - b] = [\mathbf{0}, 0]. \text{ 所以}$$

$$[-A \times C^{-bj}, -b] * [a, b] = [a, b] * [-A \times C^{-bj}, -b] = [\mathbf{0}, 0], \text{ 即 } [a, b] \text{ 的逆元是 } [-A \times C^{-bj}, -b].$$

从定义 1, 可知 $\Gamma = ((Z_2)^n \times Z_r, *)$ 是一个群.

接下来证明 $\text{RCR}(k, r, j)$ 是一个 Cayley 图.

令 $H = \{ [\mathbf{0}00 \cdots 000, 1], [\mathbf{0}00 \cdots 000, r-1], [\mathbf{0}00 \cdots 000, 0], [\mathbf{0}10 \cdots 000, 0], \dots, [\mathbf{0}0 \cdots 01 \underbrace{0 \cdots 000}_k, 0] \}$ 注意到 H 的每个元素的逆元也在 H 中, 所以 H 是一个 Cayley 集.

对于 $(Z_2)^n \times Z_r$ 的任意元素 $[a, b]$ 和 H 中的任意点, 可以得到如下 $\text{RCR}(k, r, j)$ 中点 $[a, b]$ 的链:

$$([a, b], [\mathbf{0}00 \cdots 000, 1] * [a, b]) = ([a, b], [a, b+1]),$$

$$([a, b], [\mathbf{0}00 \cdots 000, r-1] * [a, b]) = ([a, b], [a, b+r-1]) = ([a, b], [a, b-1]),$$

$$\text{因为 } [\mathbf{0}00 \cdots 000, 0] * [a, b] = [\mathbf{1}00 \cdots 000] \times C^{bj} + A, b + 0] = [\mathbf{1}00 \cdots 000] \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$A, b] = [\underbrace{\mathbf{0}0 \cdots 01 \mathbf{0} \cdots 00}_{bj+1}] + A, b] =$$

$$\begin{aligned}
& [00 \cdots 010 \cdots 00] + (a_1 a_2 \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}), b] = \\
& [a_1 a_2 \cdots \bar{a}_{bj+1} \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b], \text{有} \\
& ([A, b], [00 \cdots 000, 0] * [A, b]) = ([A, b], \\
& [a_1 a_2 \cdots \bar{a}_{bj+1} \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b]). \\
& \text{同样地, 有 } ([A, b], [010 \cdots 000, 0] * [A, b]) = \\
& ([A, b], [a_1 a_2 \cdots \bar{a}_{bj+2} \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b]), \cdots, \\
& ([A, b], [\underbrace{00 \cdots 010 \cdots 00}_k, b] * [A, b]) = ([A, \\
& b], [a_1 a_2 \cdots \bar{a}_{bj+k} \cdots a_{k+j-1} a_{k+j}, b]).
\end{aligned}$$

由定义3可知 RCR(k, r, j) 是 Cayley 图. 证毕.

需要注意的是这里所定义关于运算 $*$ 的群不是交换群. 例如, 可以假设 $[A, b] = [010 \cdots 000, b]$ 和 $[X, y] = [00 \cdots 000, y]$ 都在 $(Z_2)^n \times Z_r$ 中. 因为

$$\begin{aligned}
A \times C^{vj} &= (010 \cdots 000) \times \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
& (\underbrace{000 \cdots 01}_{yj+2} \ 0 \cdots 000), \text{所以} \\
& A \times C^{vj} + X = (\underbrace{000 \cdots 01}_{yj+2} \ 0 \cdots 000) + (100 \cdots 000) \\
& = (\underbrace{100 \cdots 01}_{yj+2} \ 0 \cdots 000), \\
& \text{因此 } [A, b] * [X, y] = [A \times C^{vj} + X, b + y] = \\
& [\underbrace{100 \cdots 01}_{yj+2} \ 0 \cdots 000, b + y].
\end{aligned}$$

$$\text{另一方面, 因为 } X \times C^{bj} = (\underbrace{000 \cdots 01}_{bj+1} \ 0 \cdots 000),$$

所以

$$\begin{aligned}
X \times C^{bj} + A &= (\underbrace{000 \cdots 01}_{bj+1} \ 0 \cdots 000) + (010 \cdots 000) \\
&= (\underbrace{010 \cdots 01}_{bj+1} \ 0 \cdots 000), \text{故} \\
[X, y] * [A, b] &= [X \times C^{bj} + A, y + b] = \\
& [\underbrace{010 \cdots 01}_{bj+1} \ 0 \cdots 000, y + b]
\end{aligned}$$

显然, $[A, b] * [X, y] \neq [X, y] * [A, b]$, 故上述证明中定义的群关于运算 $*$ 不是交换群.

4 总结

本文针对论文 [1] 中提出的 RCR 网络重新证明了 RCR 网络是一个 Cayley 图, 并对 RCR 网络中的节点标记也做了相应的更改.

参考文献:

- [1] 徐俊明. 组合网络理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [2] Sun Y, Cheung P, Lin X. Recursive cube of Rings: A new topology for interconnection networks [J]. IEEE. Parallel Dist. Syst, 2000, 11(3): 275-286.
- [3] 徐俊明, 徐克力. Cayley 图的笛卡尔乘积 [J]. 中国科学技术大学学报, 2001, 31(6): 635-640.
- [4] Hu H, Gu N, Cao J. A note on recursive cube of rings network [J]. IEEE Trans Parallel and Dist Syst, 2005, 16(10): 1007-1008.
- [5] Choi D, Lee O, Chung I. A parallel routing algorithm on recursive cube of rings networks employing Hamiltonian circuit Latin square [J]. Inf Sci, 2008, 178: 1533-1541.
- [6] 唐高华. 近世代数 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [7] 赵淼清. 近世代数 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2005.

A Class of Cayley Graphs: Recursive Cubes of Ring Networks

Cheng Dong-qin

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Recursive Cube of Rings (RCR) is proven to be the Cayley graph, known as a quite suitable interconnected network which possesses many good topological properties. The Cayley graph is obtained from the finite group. Firstly, a new group was defined. Then, RCR was proved to be the Cayley graph. Finally, necessary modifications to the way of marking the nodes in RCR were made accordingly.

Key words: recursive cube of ring network; Cayley Graph; network; group